1953 г. март — апрель *т. VIII, вып. 2 (54)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТРЁХМЕРНЫЙ И ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЙ АНАЛОГОН ТЕОРЕМЫ ПАСКАЛЯ

Д. Д. Мордухай-Болтовской[1])

§ 1. М. Шаль в своей истории геометрии высказывает без доказательства следующую теорему, являющуюся стереометрическим аналогоном теоремы Паскаля.

Плоскости, определяемые точками пересечения некоторой поверхности второго порядка с тремя рёбрами тетраэдра, сходящимися в одной вершине, пересекают противоположные грани по прямым, которые являются прямолинейными образующими одного гиперболоида.

Так расположенные прямые будем называть *гиперболоидальными.*

Основная цель настоящей статьи — выявление аналогона теоремы Паскаля в четырёхмерном пространстве. В упомянутой монографии М. Шаля доказательства не даётся. Я дам ниже это доказательство, и оно послужит образцом для построения соответствующей теоремы в четырёхмерном пространстве.

Пусть дан тетраэдр с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и некоторая поверхность второго порядка (F_2). Рёбра тетраэдра обозначим так:

$$\left.\begin{array}{lll} A_1A_2 \equiv b_{12}, & A_1A_3 \equiv b_{13}, & A_1A_4 \equiv b_{14}, \\ A_2A_3 \equiv b_{23}, & A_2A_4 \equiv b_{24}, & A_3A_4 \equiv b_{34}. \end{array}\right\}$$

Точки пересечения рёбер тетраэдра с поверхностью обозначим соответственно через

$$B_{12}^{(1)},\quad B_{12}^{(2)},\quad B_{13}^{(1)},\quad B_{13}^{(3)},\quad B_{14}^{(1)},\quad B_{14}^{(4)},\quad B_{23}^{(2)},\quad B_{23}^{(3)},\quad B_{24}^{(2)},\quad B_{24}^{(4)},\quad B_{34}^{(3)},\quad B_{34}^{(4)}.$$

Прямые, соединяющие эти последние точки, обозначим так:

$$\left.\begin{array}{lll} B_{12}^{(1)}B_{13}^{(1)} \equiv a_{23}^{(1)}, & B_{13}^{(3)}B_{23}^{(3)} \equiv a_{12}^{(3)}, & B_{12}^{(2)}B_{23}^{(2)} \equiv a_{13}^{(2)}, \\ B_{13}^{(1)}B_{14}^{(1)} \equiv a_{34}^{(1)}, & B_{12}^{(1)}B_{14}^{(1)} \equiv a_{24}^{(1)}, & B_{23}^{(2)}B_{24}^{(2)} \equiv a_{34}^{(2)}, \\ B_{12}^{(2)}B_{24}^{(2)} \equiv a_{14}^{(2)}, & B_{13}^{(3)}B_{34}^{(3)} \equiv a_{14}^{(3)}, & B_{23}^{(3)}B_{34}^{(3)} \equiv a_{24}^{(3)}, \\ B_{14}^{(4)}B_{24}^{(4)} \equiv a_{12}^{(4)}, & B_{24}^{(4)}B_{34}^{(4)} \equiv a_{23}^{(4)}, & B_{14}^{(4)}B_{34}^{(4)} \equiv a_{13}^{(4)}. \end{array}\right\}$$

---

[1]) Настоящая заметка является одной из последних работ Д. Д. Мордухай-Болтовского. Эта заметка подготовлена к печати после смерти Д. Д. Мордухай-Болтовского проф. М. П. Черняевым.

Грани данного тетраэдра будем обозначать так:

$$A_2A_3A_4 \equiv \alpha_1, \quad A_3A_4A_1 \equiv \alpha_2, \quad A_4A_1A_2 \equiv \alpha_3, \quad A_1A_2A_3 \equiv \alpha_4.$$

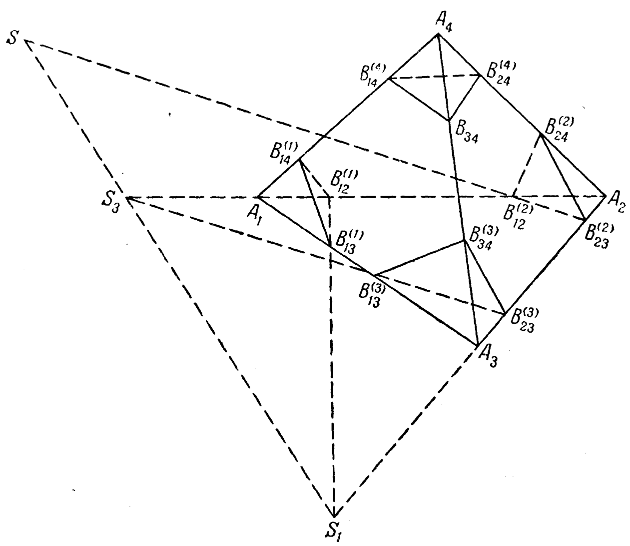
Плоскости треугольников, вершинами которых являются точки пересечения поверхности (F_2) с рёбрами тетраэдра, сходящимися в одной вершине, обозначим так:

$$B_{12}^{(1)}B_{13}^{(1)}B_{14}^{(1)} \equiv \beta_1, \quad B_{12}^{(2)}B_{23}^{(2)}B_{24}^{(2)} \equiv \beta_2, \quad B_{13}^{(3)}B_{23}^{(3)}B_{34}^{(3)} \equiv \beta_3, \quad B_{14}^{(4)}B_{24}^{(4)}B_{34}^{(4)} \equiv \beta_4.$$

Рассмотрим шестиугольник, лежащий в плоскости грани α_4:

$$B_{12}^{(1)}B_{12}^{(2)}B_{23}^{(2)}B_{23}^{(3)}B_{13}^{(3)}B_{13}^{(1)}.$$

Этот шестиугольник вписан в коническое сечение — пересечение поверхно-



сти второго порядка (F_2) и плоскости грани α_4. По теореме Паскаля на одной прямой l_{123} лежат три следующие точки пересечения противоположных сторон шестиугольника:

$$\left.\begin{aligned} B_{12}^{(1)}B_{12}^{(2)} \times B_{23}^{(3)}B_{13}^{(3)} &\equiv b_{12} \times a_{12}^{(3)} \equiv S_3, \\ B_{12}^{(2)}B_{23}^{(2)} \times B_{13}^{(3)}B_{13}^{(1)} &\equiv a_{13}^{(2)} \times b_{13} \equiv S, \\ B_{23}^{(2)}B_{23}^{(3)} \times B_{13}^{(1)}B_{12}^{(1)} &\equiv b_{23} \times a_{23}^{(1)} \equiv S_1. \end{aligned}\right\}$$

Точка пересечения прямых $a_{23}^{(1)}$ и l_{123} лежит на прямой пересечения плоскостей α_1 и β_1, то-есть прямая l_{123} пересекает прямую $(\alpha_1 \times \beta_1)$ в точке S_1. Аналогично убеждаемся, что прямая l_{123} пересечёт также прямую $(\alpha_2 \times \beta_2)$ в точке S и прямую $(\alpha_3 \times \beta_3)$ в точке S_3. Прямая l_{123} пересечёт и прямую $(\alpha_4 \times \beta_4)$, так как обе эти прямые лежат в одной плоскости α_4 (плоскости грани $A_1A_2A_3$). Итак, прямая l_{123} пересекает четыре скрещивающиеся прямые

$$(\alpha_1 \times \beta_1), \quad (\alpha_2 \times \beta_2), \quad (\alpha_3 \times \beta_3) \quad \text{и} \quad (\alpha_4 \times \beta_4).$$

Прямые Паскаля l_{134}, l_{234}, l_{124} шестиугольников, вписанных в конические сечения — пересечения поверхности (F_2) с плоскостями граней α_2, α_1 и α_3, — также будут пересекать те же прямые

$$(\alpha_1 \times \beta_1), \quad (\alpha_2 \times \beta_2), \quad (\alpha_3 \times \beta_3) \quad \text{и} \quad (\alpha_4 \times \beta_4).$$

Итак, указанные четыре прямые пересекаются четырьмя другими прямыми. В таком случае, как известно, эти прямые принадлежат одной системе прямолинейных образующих гиперболоида. Теорема доказана.

§ **2.** Теорема, взаимная предыдущей, получается в силу закона двойственности или по методу взаимных поляр.

Если точки пересечения касательных плоскостей, проведённых через рёбра, лежащие в одной грани, соединить с противоположными этим граням вершинами, то полученные четыре прямые будут гиперболоидальными.

В случае совпадения этих троек плоскостей получим, что *в описанном около поверхности второго порядка тетраэдре прямые, соединяющие вершины с точками прикосновения противоположных граней, гиперболоидальны.*

§ **3.** Переходим теперь к гиперповерхности второго порядка, пересечённой пентаэдроидом. Обозначим через A_i вершины, через $\overline{\alpha}_i$ — гиперграни, им противоположные, через α_{ik} — грани, через b_{ik} — рёбра. Четыре точки пересечения $\beta_{jk}^{(i)}$ рёбер, сходящихся в вершине A_i, с гиперповерхностью определяют гиперплоскость β_i, в которой лежит тетраэдр, определяемый этими точками. Рассмотрим гипергрань $\overline{\alpha}_5$, проходящую через точки A_1, A_2, A_3, A_4. Мы будем иметь в её гиперплоскости поверхность второго порядка — пересечение гиперграни с гиперповерхностью второго порядка.

На основании только что доказанной теоремы прямые пересечения граней тетраэдра, образующего гипергрань, с плоскостями $\beta_1^{(5)}$, $\beta_2^{(5)}$, $\beta_3^{(5)}$, $\beta_4^{(5)}$, определяемыми точками пересечения рёбер с гиперповерхностью, все имеют общие точки с четырьмя прямыми l_{123}, l_{124}, l_{134}, l_{234} (паскалевыми прямыми в образуемых на гранях шестиугольниках). Итак, плоскость, лежащая на пересечении $\overline{\beta}_5$ и $\overline{\alpha}_5$, будет пересекаться четырьмя прямыми:

$$l_{123}, \quad l_{124}, \quad l_{134} \quad \text{и} \quad l_{234}.$$

Возьмём теперь гипергрань, проходящую через вершины A_1, A_2, A_3 и A_5. Мы получим прямые l_{123}, l_{125}, l_{135} и l_{235}, пересекающие ту же плоскость, и т. д. Вообще будем иметь 10 паскалевых прямых:

$$\left.\begin{array}{llll} l_{123}, & l_{124}, & l_{134}, & l_{234}, \\ l_{123}, & l_{125}, & l_{135}, & l_{235}, \\ l_{124}, & l_{125}, & l_{245}, & l_{145}, \\ l_{134}, & l_{135}, & l_{345}, & l_{145}, \\ l_{234}, & l_{235}, & l_{245}, & l_{345}, \end{array}\right\}$$

пересекающих плоскости

$$(\overline{\alpha}_1 \times \overline{\beta}_1),\ (\overline{\alpha}_2 \times \overline{\beta}_2),\ (\overline{\alpha}_3 \times \overline{\beta}_3),\ (\overline{\alpha}_4 \times \overline{\beta}_4),\ (\overline{\alpha}_5 \times \overline{\beta}_5).$$

Итак, *гиперплоскости, определяемые точками пересечения гиперповерхности второго порядка со сходящимися в общих вершинах рёбрами пентаэдроида, пересекаются с противоположными гипергранями по плоскостям, пересекаемым десятью прямыми.* Так расположенные плоскости будем называть *гиперболоидальными*.

§ 4. Отметим, что в этом случае будем иметь бесконечное множество прямых, пересекающих эти плоскости. Эти прямые образуют гиперповерхность, аналогичную гиперболоиду.

Вообще достаточно иметь не менее трёх прямых, пересекающих пять плоскостей, для того чтобы их было бесконечное множество. В самом деле, берём на плоскости α_1 точку M. Проводим через M и α_2 гиперплоскость $\overline{\beta}_2$, а через M и α_3 — гиперплоскость $\overline{\beta}_3$. Они пересекутся по плоскости β_{23}. Эта плоскость пересечёт α_5 в точке M'. Взяв вместо α_2, α_3 плоскости α_2, α_4, таким же образом получим на α_5 точку M''.

Пунктуалы M' и M'' будут проективны. Если точки M' и M'' совпадут, то они окажутся двойными и будут находиться одновременно в плоскостях β_{23} и β_{24}; точка M также лежит в плоскостях β_{23} и β_{24}; прямая MM' пересечёт все пять плоскостей.

Так как в двух проективных системах не может быть трёх двойных точек без того, чтобы системы совпадали всеми своими точками, то получим, что наличие трёх прямых, пересекающих пять плоскостей, влечёт за собой существование бесконечного их числа.

§ 5. Теоремой, взаимной теореме § 3, является следующая:

Если точки пересечения касательных гиперплоскостей, проведённых через грани пентаэдроида, принадлежащие одной гиперграни, соединить с противоположными граням вершинами, то все полученные прямые пересекаются десятью плоскостями.

Так расположенные прямые будем называть *гиперболоидальными* (отметим, что существует бесконечно много плоскостей, пересекающих эти прямые; они огибают гиперповерхность, аналогичную гиперболоиду).

§ 6. В том случае, когда четвёрки плоскостей совпадают, получаем теорему об описанном около гиперповерхности второго порядка пентаэдроиде:

Прямые, соединяющие вершины описанного около гиперповерхности второго порядка пентаэдроида с точками прикосновения противоположных гиперграней, пересекаются десятью плоскостями, то-есть расположены гиперболоидально.

Поступило в редакцию 4 июля 1952 г.